# Zwei Transformationen

# und $-\ln(1-x)$

Christian Reinbothe
Sudermanplatz 8 - 10
50670 Köln
Germany
http://WWW.Reinbothe.DE

# 1. Hilfmittel (s. [3])

**Def.:** Sei $J$ ein nicht-leeres Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.
Wir definieren:

1. $\phi : J \to \mathbb{R}$ ist convex genau dann, wenn
$\forall x, y \in J \quad \forall t \in [0; 1] \quad \phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$

2. Gelte $\phi(J) \subseteq \mathbb{R}_+$.
$\phi : J \to \mathbb{R}$ ist logarithmisch convex genau dann, wenn
$\ln(\phi) : J \to \mathbb{R}$ convex ist.

**Bem.:** Gelte $\phi(J) \subseteq \mathbb{R}_+$.
Da $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convex und monoton steigend ist, gilt das Folgende:

$(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist logarithmisch convex$) \Rightarrow$
$(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist convex$)$

**Satz:**

**Vor.:** Sei $J$ ein nicht-leeres offenes Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung.

**Beh.:** $(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist convex$) \Leftrightarrow$
$(\phi' : J \to \mathbb{R}$ ist monoton steigend$)$

**Satz:**

**Vor.:** Sei $J$ ein nicht-leeres offenes Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine 2-mal differenzierbare Abbildung.

**Beh.:** $(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist convex$) \Leftrightarrow$
$\phi'' \geq 0$

# 2. Gamma-Funktion (s. [3])

Die Gamma-Funktion $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ definiert durch das absolut konvergente Integral

$$\Gamma(\alpha) := \underbrace{\int_0^\infty \tau^{\alpha - 1} \cdot e^{-\tau} \, d\tau}_{>0}$$

In der Literatur kann man Folgendes finden:

$$\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ ist analytisch} \tag{1}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \tag{2}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \Gamma(k + 1) = k! \tag{3}$$

$$\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ ist logarithmisch convex (und also auch convex)} \tag{4}$$

$$\Gamma(1) = 1 \text{ und } \Gamma(2) = 1 \tag{5}$$

Nach (4) und (5) gilt:

$$\Gamma \mid [2; \infty[ \text{ ist monoton steigend} \tag{6}$$

Wir definiern eine Abbildung $\gamma : ]-1;\infty[ \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall u \in ]-1; \infty[ \quad \gamma(u) := \Gamma(u + 1)$$

Dann gilt nach (2):

$$\forall v \in ]-1; \infty[ \quad \gamma(v + 1) = (v + 1)\, \gamma(v) \tag{7}$$

Zusätzlich liefert (6):

$$\gamma \mid [1; \infty[ \text{ ist monoton steigend} \tag{8}$$

# 3 Zwei Transformationen für Po tenzreihen

Für jedes $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}_+$ existieren zwei Transformationen von Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \mapsto \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n + \tilde{\alpha}} a_n x^{n+\tilde{\alpha}} \tag{T1}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} b_n x^n \qquad \mapsto \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma\left(n + \tilde{\alpha}\right)} b_n x^{n+\tilde{\alpha}} \tag{T2}$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$, für das die betrachtete Potenzreihe absolut konvergent ist, sind auch die beiden Transformationen (T1) und (T2) absolut konvergent.

Für die Transformation (T1) gilt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n + \tilde{\alpha}} a_n x^{n+\tilde{\alpha}}\right)' = x^{\tilde{\alpha}-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Das Differenzieren der Transformation (T2) resultiert im günstigen Fall in einer gutartigen gewöhnlichen linearen Differentialgleichung. Dann liefert ein Vergleich der Transformation (T1) mit den Termen der Lösung dieser DGL (s. Kapitel 7) eine interessante Gleichung. Mann kann diese Methode auf jede Potenzreihe anwenden, bei der ein "gutartige" innerer Zusammenhang der $b_n$ besteht.

# 4 Betrachtung von -ln(*1*-*x*)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$ .
Sei $J = ]0;1[$ .
Wir definieren eine Abbildung $f : J \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall t \in J \quad f(t) := -\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} t^n$$

Nach Analysis gilt:

$f : J \to \mathbb{R}$ ist wohl-definiert und differenzierbar

Wir definieren nun eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad b_n := \begin{cases} 0 & n = 0 \\ (n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

Dann gilt das Folgende:

$$\forall t \in J \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} b_n t^n$$

# 5. Differenzieren von (T1)

Wir definieren eine Abbildung $\tilde{f} : J \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall t \in J \quad \tilde{f}(t) := \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, t^n$$

Nach Analysis gilt:

$\tilde{f} : J \to \mathbb{R}$ ist wohl-definiert und differenzierbar

Wir definieren nun eine Folge $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad a_n := (-1)^n$$

Dann gilt das Folgende:

$$\forall t \in J \quad \tilde{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Gelte $x = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\right) \mid J$.

Wir wenden die Transformation (T1) auf $\tilde{f} : J \to \mathbb{R}$ an und erhalten die Abbildung $A_\alpha : J \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\forall t \in J \quad A_\alpha(t) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n + (\alpha + 1)} a_n t^{n+(\alpha+1)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (\alpha + 1)} t^{n+(\alpha+1)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + \alpha} t^{n+\alpha}\end{aligned}$$

Offenbar ist $A_\alpha : J \to \mathbb{R}$ wohl-definiert und differenzierbar und es gilt das Folgende:

$$\forall t \in J \quad A'_\alpha(t) = t^\alpha \cdot \tilde{f}(t) = \frac{t^\alpha}{1 + t}$$

bzw.

$$A_\alpha : J \to \mathbb{R} \text{ ist eine Stammfunktion von } \frac{x^\alpha}{1 + x} \text{ auf } J \qquad (*)$$

# 6. Differenzieren von (T2)

Wir wenden nun die Transformation (T2) auf die Abbildung $f : J \to \mathbb{R}$ an und erhalten die Abbildung $B_\alpha : J \to \mathbb{R}$:

$$\forall t \in J \quad B_\alpha(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma(n+\alpha)} b_n t^{n+\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{\gamma(n+\alpha)} t^{n+\alpha}$$

Offenbar ist $B_\alpha : J \to \mathbb{R}$ wohl-definiert und differenzierbar und es gilt für alle $t \in J$:

$$\begin{aligned}
B'_\alpha(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{\gamma(n+\alpha)} (n+\alpha)\, t^{n+\alpha-1} = \\
&= \frac{\alpha+1}{\gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)!}{\gamma(n+\alpha)} (n+\alpha)\, t^{n+\alpha-1} = \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} t^\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)!}{\gamma(n+\alpha-1)} t^{n+\alpha-1} = \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} t^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\gamma(n+\alpha)} t^{n+\alpha} = \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} t^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{\gamma(n+\alpha)} n t^{n+\alpha} = \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} t^\alpha + t^{\alpha+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{\gamma(n+\alpha)} n t^{n-1} = \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} t^\alpha + t^{\alpha+1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{\gamma(n+\alpha)} x^n \right)'(t) = \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} t^\alpha + t^{\alpha+1} \left( x^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{\gamma(n+\alpha)} x^{n+\alpha} \right)'(t) = \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} t^\alpha + t^{\alpha+1} \left( x^{-\alpha} B_\alpha(x) \right)'(t)
\end{aligned}$$

Für alle $t \in J$ gilt:

$$\left(x^{-\alpha} B_{\alpha}(x)\right)'(t) = -\alpha t^{-(\alpha+1)} B_{\alpha}(t) + t^{-\alpha} B'_{\alpha}(t)$$

Dann folgt für alle $t \in J$:

$$\begin{aligned} B'_{\alpha}(t) &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} t^{\alpha} + t^{\alpha+1} \left(-\alpha t^{-(\alpha+1)} B_{\alpha}(t) + t^{-\alpha} B'_{\alpha}(t)\right) = \\ &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} t^{\alpha} - \alpha B_{\alpha}(t) + t B'_{\alpha}(t) \end{aligned}$$

bzw.

$$(1 - t) B'_{\alpha}(t) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} t^{\alpha} - \alpha B_{\alpha}(t)$$

bzw.

$$B'_{\alpha}(t) = \frac{1}{(1 - t)\gamma(\alpha)} t^{\alpha} - \frac{\alpha}{1 - t} B_{\alpha}(t)$$

Schließlich kommen wir zu dem Schluss:

$$\left(\begin{array}{l} B_{\alpha} \text{ genügt der gewöhnlichen linearen DGL} \\ \left(y_{\alpha}\right)' + \dfrac{\alpha}{1 - x} y_{\alpha} = \dfrac{1}{(1 - x)\gamma(\alpha)} x^{\alpha} \text{ on } J \end{array}\right) \tag{9}$$

# 7. Lösung der DGL (s. [2])

**Satz:**

**Vor.:** Sei $I$ ein nicht-leeres offenes Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $g : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.
Sei $h : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.
Sei $\xi \in I$.
Sei $\eta \in \mathbb{R}$.

**Beh.:** Das Anfangswertproblem

$$y' + g(t)\, y = h(t) \qquad y(\xi) = \eta \qquad t \in I$$

hat genau eine Lösung. Sie existiert auf ganz $I$.

**Bem.:** Sei $G : I \to \mathbb{R}$ die Stammfunktion von $g : I \to \mathbb{R}$ mit $G(\xi) = 0$, d.h.

$$\forall t \in I \qquad G(t) = \int_{\xi}^{t} g(\tau)\, d\tau$$

Dann gilt für die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\forall t \in I \qquad y(t) = e^{-G(t)} \cdot \left( \eta + \int_{\xi}^{t} h(\tau) \cdot e^{G(\tau)}\, d\tau \right)$$

Die obigen Integrale sind offenbar wohl-definiert.

# 8. Anwendung des vorherigen Satzes

Für die Anwendung der Substitutionsregel benötigt man eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, die definiert ist durch

$$\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \varphi(s) := \frac{s}{1 + s}$$

Dann gilt das Folgende:

$$\varphi : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ ist differenzierbar}$$

$$\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \varphi'(s) := \frac{1}{(1 + s)^2}$$

$$\varphi(]0; 1[) \subseteq ]0; 1[$$

und

$$\varphi : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ ist bijektiv}$$

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ ist differenzierbar}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \varphi^{-1}(t) := \frac{t}{1 - t}$$

Nach [3] gilt der folgende Satz (Substitutionsregel):

**Satz:**

**Vor.:** Seien $s, s_0 \in ]0;1[ \; \left(\text{Cave!: } \varphi\left(]0;1[\right) \subseteq \left(]0;1[\right)\right)$.
Sei die Abbildung $u : ]0;1[ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall t \in ]0;1[ \quad u(t) := \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha} \frac{1}{1-t}$$

**Beh.:** $u : ]0;1[ \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und es gilt:

$$\int_{\varphi(s_0)}^{\varphi(s)} u(\tau)\, d\tau = \int_{s_0}^{s} \sigma^{\alpha} \frac{1}{1+\sigma}\, d\sigma$$

**Bem.:** Die obigen Integrale sind offenbar wohl-definiert.

**Proof.:** Nach [3] gilt:

$$\int_{\varphi(s_0)}^{\varphi(s)} u(\tau)\, d\tau = \int_{s_0}^{s} u(\varphi(\sigma))\, \varphi'(\sigma)\, d\sigma$$

Dabei gilt für alle $\sigma \in ]0;1[$:

$$u(\varphi(\sigma))\, \varphi'(\sigma) = \left(\frac{\varphi(\sigma)}{1-\varphi(\sigma)}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{1-\varphi(\sigma)} \cdot \frac{1}{(1+\sigma)^2}$$

Die Terme können interpretiert werden $\left(\sigma \in ]0;1[\right)$:

$$\left(\frac{\varphi(\sigma)}{1-\varphi(\sigma)}\right)^{\alpha} = \left(\left(\varphi^{-1}\right)(\varphi(\sigma))\right)^{\alpha} = \sigma^{\alpha}$$

$$\frac{1}{1-\varphi(\sigma)} = \frac{1}{1-\dfrac{\sigma}{1+\sigma}} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{1+\sigma}\right)} = 1+\sigma$$

Man erhält schließlich für alle $\sigma \in ]0;1[$:

$$u(\varphi(\sigma))\, \varphi'(\sigma) = \sigma^{\alpha} \cdot \frac{1}{(1+\sigma)}$$

Im speziellen Fall von Kapitel 6. ist $I = \left]0;1\right[$ und die Abbildungen $g : J \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$\forall t \in J \quad g(t) := \frac{\alpha}{1 - t}$$

$$\forall t \in J \quad h(t) := \frac{1}{(1 - t)\,\gamma(\alpha)} \cdot t^{\alpha}$$

Wir definieren jetzt eine Abbildung $T_{\alpha} : J \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall s \in J \quad T_{\alpha}(s) := \gamma(\alpha) \cdot (1 + s)^{\alpha} \cdot B_{\alpha}(\varphi(s))$$

Wir beweisen schließlich:

$$T_{\alpha} \text{ ist eine Stammfunktion von } \frac{x^{\alpha}}{1 + x} \text{ auf } J \qquad (**)$$

bzw.

$$\forall s, s_0 \in J \quad T_{\alpha}(s) - T_{\alpha}(s_0) = \int_{s_0}^{s} \sigma^{\alpha} \frac{1}{1 + \sigma}\, d\sigma$$

Beweis:
Sei $s_0 \in J$ und gelte $\xi := t_0 := \varphi\left(s_0\right) \in J$. Dann gilt für die Stammfunktion $G : J \to \mathbb{R}$ von $g : J \to \mathbb{R}$ mit $G(\xi) = 0$:

$$\forall t \in J \quad G(t) = \int_{\xi}^{t} g(\tau)\, d\tau = -\alpha \left(\ln(1 - t) - \ln(1 - \xi)\right)$$

und

$$\forall t \in J \quad e^{G(t)} = \left(\frac{1 - \xi}{1 - t}\right)^{\alpha}$$

und

$$\forall t \in J \quad e^{-G(t)} = \left(\frac{1 - t}{1 - \xi}\right)^{\alpha}$$

Da $B_\alpha$ eine Lösung den Anfangswertproblems

$$y' + g(t)\, y = h(t) \qquad y(\xi) = B_\alpha(\xi) \qquad t \in J$$

ist, kann man den Satz aus Kapitel 7. anwenden und erhält für alle $t \in J$:

$$B_\alpha(t) = \left(\frac{1 - t}{1 - \xi}\right)^{\alpha} \left(B_\alpha(\xi) + \int_{\xi}^{t} \frac{\tau^{\alpha}}{(1 - \tau)\, \gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{1 - \xi}{1 - t}\right)^{\alpha} d\tau\right) \tag{10}$$

Dabei gilt für alle $t \in J$:

$$\left(\frac{1-t}{1-\xi}\right)^{\alpha} B_{\alpha}(\xi) = \frac{(1-t)^{\alpha}}{(1-\xi)^{\alpha}} B_{\alpha}(\xi)$$

und

$$\left(\frac{1-t}{1-\xi}\right)^{\alpha} \cdot \int_{\xi}^{t} \frac{\tau^{\alpha}}{(1-\tau)\,\gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{1-\xi}{1-\tau}\right)^{\alpha} d\tau =$$

$$\frac{(1-t)^{\alpha}}{(1-\xi)^{\alpha}} \cdot \int_{\xi}^{t} \frac{\tau^{\alpha}}{(1-\tau)\,\gamma(\alpha)} \cdot \frac{(1-\xi)^{\alpha}}{(1-\tau)^{\alpha}} d\tau =$$

$$\frac{(1-t)^{\alpha}}{\gamma(\alpha)} \cdot \int_{\xi}^{t} \frac{\tau^{\alpha}}{1-\tau} \cdot (1-\tau)^{-\alpha} d\tau =$$

$$\frac{(1-t)^{\alpha}}{\gamma(\alpha)} \cdot \int_{\xi}^{t} \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{1-\tau} d\tau$$

Jetzt wenden wir die Substitution $s = \dfrac{t}{1-t}$ auf die letzten beiden Gleichungen an.

Wir erhalten für alle $s \in J$:

$$\left(\frac{1-\varphi(s)}{1-\xi}\right)^{\alpha} B_{\alpha}(\xi) = \frac{(1-\varphi(s))^{\alpha}}{(1-\xi)^{\alpha}} B_{\alpha}(\xi)$$

und

$$\left(\frac{1-\varphi(s)}{1-\xi}\right)^{\alpha} \cdot \int_{\xi}^{\varphi(s)} \frac{\tau^{\alpha}}{(1-\tau)\,\gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{1-\xi}{1-\tau}\right)^{\alpha} d\tau =$$

$$\frac{(1-\varphi(s))^{\alpha}}{\gamma(\alpha)} \cdot \int_{\varphi(s_0)}^{\varphi(s)} \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{1-\tau}\, d\tau =$$

$$\frac{(1-\varphi(s))^{\alpha}}{\gamma(\alpha)} \cdot \int_{s_0}^{s} \sigma^{\alpha} \cdot \frac{1}{1+\sigma}\, d\sigma$$

Jetzt kann man die Terme in (10) interpretieren und e rhält für alle $s \in J$:

$$\begin{aligned} B_{\alpha}(\varphi(s)) = {} & \frac{(1-\varphi(s))^{\alpha}}{\left(1-\varphi\left(s_0\right)\right)^{\alpha}} B_{\alpha}\left(\varphi\left(s_0\right)\right) + \\ & + \frac{(1-\varphi(s))^{\alpha}}{\gamma(\alpha)} \cdot \int_{s_0}^{s} \sigma^{\alpha} \cdot \frac{1}{1+\sigma}\, d\sigma \end{aligned} \tag{11}$$

bzw.

$$\gamma(\alpha)\left((1-\varphi(s))^{-\alpha} B_{\alpha}(\varphi(s)) - \left(1-\varphi\left(s_0\right)\right)^{-\alpha} B_{\alpha}\left(\varphi\left(s_0\right)\right)\right) =$$

$$= \int_{s_0}^{s} \sigma^{\alpha} \cdot \frac{1}{1+\sigma}\, d\sigma$$

bzw. $\left(\forall \tilde{s} \in J \quad 1-\varphi\left(\tilde{s}\right) = \frac{1}{1+\tilde{s}}\right)$

$$T_{\alpha}(s) - T_{\alpha}\left(s_0\right) = \int_{s_0}^{s} \sigma^{\alpha} \cdot \frac{1}{1+\sigma}\, d\sigma$$

# 9. Eine interesante Gleichung

Sei $J := ]0; 1[$.
Nach (*) und (**) gilt:

$$\forall\alpha \in \mathbb{R}_+ \quad A'_\alpha - T'_\alpha = 0$$

Also existiert eine Abbildung $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall\alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \forall s \in J \quad \lambda(\alpha) = A_\alpha(s) - T_\alpha(s)$$

Da $\forall\alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \lim\limits_{s\to 0+} A_\alpha(s) = \lim\limits_{s\to 0+} T_\alpha(s) = 0$, folgt:

$$\forall\alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \lambda(\alpha) = 0$$

Nach den Definitionen von $A_\alpha$ und $T_\alpha$ gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und alle $s \in J$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+\alpha} s^{n+\alpha} - \gamma(\alpha)(1+s)^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)} (\varphi(s))^{n+\alpha} = 0$$

Dabei kann man die Terme interpretieren:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{\gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+1)} = \frac{1}{n+\alpha} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+\alpha}$$

und

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \forall s \in J \quad (1+s)^\alpha (\varphi(s))^{n+\alpha} = \frac{s^{n+\alpha}}{(1+s)^n}$$

Damit gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und alle $s \in J$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^{n-1} \left( \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \right) - \frac{1}{(1+s)^n} \left( \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+\alpha} \right) \right) \frac{(n-1)!}{n+\alpha} s^{n+\alpha} = 0$$

# 10. Literatur


[1] Jürgen Neukirch
„Algebraische Zahlentheorie"
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

[2] Wolfgang Walter
„Gewöhnliche Differentialgleichungen"
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

[3] Bronstein – Semendjajew
„Taschenbuch der Mathematik"
Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (Main)

[4] www.Wikipedia.org

[5] N. N. Lebedev
„Special Functions & Their Applications"
Dover Publications, Inc., New York

[6] Milton Abramowitz and Irene Stegun
„Handbook of Mathematical Functions"
Dover Publications, Inc., New York

[7] www.reinbothe.de